קורס תורת הקבוצות – סתיו תשס"ה

פרק ח': משפטים שקולים לאקסיומת הבחירה (גרסה 21 1.1.2005)

נוכיח עתה בעזרת אקסיומת הבחירה משפט חשוב ביותר, המנצל את מלוא כוחה של אקסיומה זאת.

151. **משפט הסדר הטוב** (אה"ב). על כל קבוצה A קיים יחס $<$ המסדר אותה היטב.

הוכחה. תהי C פונקצית בחירה על $P(A)$. לפי 150 קיים סודר δ כך ש- $A \not\preceq \delta$. יהי end עצם כלשהו שאינו איבר של A. נגדיר עתה ברקורסיה פונקציה $F : \gamma \to A \cup \{\text{end}\}$ כדלקמן.

$$F(\beta) = \begin{cases} C(A \setminus \{F(\alpha) \mid \alpha < \beta\}) & A \setminus \{F(\alpha) \mid \alpha < \beta\} \neq \emptyset \text{ אם} \\ \text{end} & A \setminus \{F(\alpha) \mid \alpha < \beta\} = \emptyset \text{ אם} \end{cases}$$

נראה כי קבוצת הסודרים β עבורם $F(\beta) \neq \text{end}$ היא רישא של γ ולכן, לפי 133ב', קבוצה זאת היא סודר δ המקיים $\delta \leq \gamma$. כדי לראות זאת נראה כי אם $\beta < \lambda < \gamma$ ו- $F(\beta) = \text{end}$ אז גם $F(\lambda) = \text{end}$. מכיוון ש- $F(\beta) = \text{end}$ אז, לפי הגדרת $F(\beta)$, $A \setminus \{F(\alpha) \mid \alpha < \beta\} = \emptyset$, ואז, מכיוון ש- $\{F(\alpha) \mid \alpha < \beta\} \subseteq \{F(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$ קיים גם $A \setminus \{F(\alpha) \mid \alpha < \lambda\} = \emptyset$, ולכן, לפי הגדרת $F(\lambda)$, $F(\lambda) = \text{end}$.

נראה עתה כי $F \restriction \delta$ היא חד חד ערכית. יהי $\beta < \lambda < \delta$ אז, לפי הגדרת $F(\lambda)$, ומכיוון ש- $\lambda < \delta$, $A \setminus \{F(\alpha) \mid \alpha < \lambda\} \neq \emptyset$ ו- $F(\lambda) = C(A \setminus \{F(\alpha) \mid \alpha < \lambda\})$ ולכן, מכיוון ש-C פונקצית בחירה, $F(\lambda) \in A \setminus \{F(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$, כלומר $F(\lambda) \neq F(\alpha)$ לכל $\alpha < \lambda$, ובמיוחד $F(\lambda) \neq F(\beta)$.

אם $\delta = \gamma$ אז $F \restriction \delta$ היא העתקה חח"ע של $\delta = \gamma$ לתוך A בניגוד לבחירת γ, לכן $\delta < \gamma$. לפי הגדרת δ זה אומר כי $F(\delta) = \text{end}$, ולפי הגדרת $F(\delta)$ זה אומר כי $A \setminus \{F(\alpha) \mid \alpha < \delta\} = \emptyset$, ולכן $A \subseteq \{F(\alpha) \mid \alpha < \delta\} = \text{Range}(F\restriction\delta)$. ראינו כבר לעיל כי $\text{Range}(F\restriction\delta) \subseteq A$ ולכן $\text{Range}(F\restriction\delta) = A$ ו- $F \restriction \delta$ היא העתקה חח"ע של δ על A. לפי 149 $F \restriction \delta$ משרה יחס $<$ על A המסדר את A היטב.

הוכחת משפט הסדר הטוב דומה בקוויה הכלליים להוכחות של משפטים אחרים רבים. לכן ננתח עתה את ההוכחה הזאת ונראה מהם המרכיבים העיקריים שלה, במטרה למצוא את שלד ההוכחה ולמצוא משפט כללי שיאמר שאפשר בהנחות כלליות להגיע לתוצאה שהביא אליה שלד ההוכחה, ואז נוכל להשתמש במשפט כללי זה בהוכחות אחרות מבלי לחזור על הוכחתו. בהוכחת משפט הסדר הטוב בנינו העתקה F, וליתר דיוק $F \restriction \delta$, מן הסודר δ על הקבוצה A. העתקה זאת נבנתה ברקורסיה, כאשר בשלב $\alpha < \delta$ היו לנו כבר את ערכי F לסודרים הקטנים מ-α, ובשלב זה קבענו את $F(\alpha)$. נסמן את $F \restriction \alpha$ ב-f, ואז אנו יכולים לומר שבשלב α היתה לנו פונקציה חח"ע $f : \alpha \to A$, הגדרנו את $F(\alpha)$ וזה נתן לנו המשכה $f' : \alpha \cup \{\alpha\} \to A$ של f. כך המשכנו צעד אחר צעד. מתי נעצר התהליך? הוא נעצר בשלב δ שבו הגענו לפונקציה f חח"ע שהטווח שלה הוא כל A, ואותה לא יכולנו להמשיך לפונקציה $f' : \delta \cup \{\delta\} \to A$ מבלי לקלקל את חד חד ערכיות f'. את הפונקציות שאנו יכולים לקבל בשלבים השונים של בנית F, מבלי להתייחס בשלב זה לפונקצית בחירה C מסויימת, אנו יכולים לסדר בסדר חלקי $<$, כך ש- $g < h$ פירושו שכל אחת מ-g ו-h היא פונקציה חח"ע מסודר לתוך A וש-h היא המשכה ממש של g, כלומר ש- $g \subseteq h$ ותחום h הוא סודר גדול מן הסודר שהוא תחום g. מה שאנו עושים בתהליך הרקורסיה הוא שאנו מטפסים למעלה בקבוצה הסדורה חלקית של פונקציות אלו מצומת לצומת עד שאנו מגיעים לאיבר שממנו אי אפשר להמשיך, אשר בו אנו מעוניינים כי הוא העתקה חח"ע של סודר על A. זהו המרכיב הראשון בשלד הוכחת משפט הסדר הטוב.

המרכיב השני בהוכחה הוא כדלקמן. כאשר אנו מתחילים בבניית הפונקציה F ע"י קביעת $F(0)$ אז כל עוד לא בחרנו פונקצית בחירה C מסויימת אנו יכולים לבחור כ-$F(0)$ איבר כלשהו של A, ובשלב הבא אנו

יכולים לבחור כ-$F(1)$ כל איבר של A השונה מ-$F(0)$, וכן הלאה. כך בכל שלב בטיפוס בקבוצה הסדורה חלקית של הפונקציות יש לנו אפשרויות רבות לטפס לצומת גבוה יותר ע"י בחירת איבר "חדש" כלשהו של A. מכיוון שכאשר מדובר באינסוף בחירות של הצעד הבא אנו זקוקים למורה דרך שבכל שלב יצביע על כיוון מסויים ללכת בו. מורה דרך זה הוא פונקצית הבחירה C. ליתר פרוט, בשלב α אנו יכולים לבחור עבור $F(\alpha)$ איבר כלשהו של $A \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}$, ו-$C$ אומר לנו לבחור את $C(A \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\})$. שימוש זה בפונקצית בחירה C כמורה דרך בטיפוס בקבוצה הסדורה חלקית של הפונקציות הוא המרכיב השני בהוכחת משפט הסדר הטוב.

המשפט הבא הוא המשפט הכללי האומר לנו שאפשר לטפס מן התחתית לצמרת בקבוצה סדורה חלקית ובתנאי מסויים אפשר להגיע בסוף הטיפוס אל אחת הפסגות, כלומר אל איבר מקסימלי בקבוצה. כאשר נרצה להבא להוכיח משפט כלשהו בדרך זאת לא נצטרך להשתמש ברקורסיה ולהעזר בפונקצית בחירה אלא נשתמש במשפט הבא המביא אותנו ישר לאיבר המקסימלי, אותו אנו מחפשים, ומה שנותר לנו לעשות הוא רק להוכיח את קיום התנאי הדרוש בהקשר בו אנו משתמשים במשפט.

המושגים המופיעים בלמה של צורן. הלמה של צורן עוסקת בקבוצה סדורה חלקית. איבר a בקבוצה סדורה חלקית W נקרא **איבר מקסימלי** אם אין בקבוצה W איבר גדול ממנו, כלומר לא קיים $b \in W$ כך ש- $a < b$. אם W היא קבוצה סדורה אז, מכיוון שכל שנים מאיבריה ניתנים להשוואה, זה אומר שלכל $b \in W$ קיים $b \leq a$, ולכן יכול להיות ב-W כזאת רק איבר מקסימלי אחד, אבל בקבוצה W סדורה חלקית שאינה סדורה, איברים b השונים מאיבר מקסימלי a אינם בהכרח קטנים ממנו, ויכולים להיות איברים מקסימליים רבים. נתבונן בקבוצה W של כל הקבוצות של המספרים הטבעיים שעוצמתן לכל היותר 7, כאשר יחס הסדר $<$ הוא יחס ההקפה ממש $\subsetneq$. האיברים המקסימליים של W הן הקבוצות של המספרים הטבעיים שעוצמתן 7, כי לקבוצות a אלו לא קיים $b \in W$ כך ש- $a \supsetneq b$; קבוצות של מספרים טבעיים שעוצמתן קטנה מ-7 אינן איברים מקסימליים של W כי יש ב-W קבוצות המקיפות אותן ממש.

לקבוצה סדורה חלקית, גם אם אינה סדורה, יש קבוצות חלקיות שהן סדורות לגמרי, כלומר סדורות, ע"י אותו יחס. למשל, אם נתבונן ביחס הסדר החלקי R על המספרים הטבעיים כך ש- mRn אם m מחלק את n ושונה ממנו, אז R הוא יחס סדר חלקי על הטבעיים. R איננו יחס סדר מלא כי, למשל, למספרים 2 ו-3 לא קיים $2R3$ ולא $3R2$. אולם יש ל-N קבוצות חלקיות, ואפילו אינסופיות, שהן סדורות לגמרי ע"י R, למשל, עבור מספר m כלשהו, קבוצת כל החזקות של m סדורה לגמרי ע"י R.

152. **תרגיל**. הוכח שלקבוצה סדורה חלקית סופית ולא ריקה יש איבר מקסימלי.

153. **הלמה של צורן** (אה"ב). תהי W קבוצה סדורה חלקית בעלת התכונה שלכל קבוצה $V \subseteq W$ שהיא מסודרת היטב ע"י היחס $<$ של W יש חסם מלעיל ב-W, כלומר שיש ב-W (ולאו דווקא ב-V) איבר הגדול מכל איברי V, אז יש ב-W איבר מקסימלי.

דיון בלמה של צורן. א. הלמה של צורן אינה למה ואינה של צורן. היא נקראת בשם זה, שהתקבל לגמרי ואין אפשרות לשנותו, כי המתמטיקאי צורן השתמש בו, בשנות השלושים של המאה הקודמת, כמשפט עזר להוכחת משפטים בתחום האלגברה. אולם, משפט זה הוא משפט חשוב ומרכזי בזכות עצמו. כמו כן, הראשון שהוכיח אותו הוא לא צורן אלא המתמטיקאי האוזדורף בשנת 1914.

ב. לא דרשנו במפורש ש-W אינה ריקה, למרות שברור שהנחה זאת צריכה להופיע במקום כלשהו כי מסקנת המשפט בוודאי שאינה נכונה כאשר W ריקה. הנחה זאת מסתתרת בהנחה שלכל קבוצה $V \subseteq W$ המסודרת היטב ע"י $<$ יש חסם מלעיל ב-W, כי הקבוצה הריקה $\emptyset$ היא כמובן חלקית ל-W וסדורה היטב ע"י $<$, ולכן צריך להיות לה חסם מלעיל ב-W, וזה אומר שב-W צריך להיות איבר כלשהו. לכן יש להקפיד בשימוש בלמה של צורן שההוכחה שלכל תת קבוצה V של W הסדורה היטב יש חסם מלעיל ב-W חלה גם על המקרה $B = \emptyset$, או להוכיח ישירות ש-W אינה ריקה.

ג. בניסוח המקובל של הלמה של צורן התנאי הוא שלכל קבוצה $V \subseteq W$ שהיא מסודרת לגמרי, ולאו דווקא מסודרת היטב, ע"י היחס $<$ של W יש חסם מלעיל ב-W. ההנחה כאן היא חלשה יותר כי היא מתייחסת רק לקבוצות חלקיות סדורות היטב ולכן המשפט כאן חזק יותר. גם המשפט המתייחס לכל הקבוצות הסדורות לגמרי מספיק לכל השימושים, אבל בחרנו כאן להתייחס רק לקבוצות חלקיות סדורות היטב, כי לא היינו צריכים להתאמץ יותר כדי להגיע אליו.

ד. כפי שנאמר לעיל, מה שנעשה בהוכחת הלמה של צורן הוא שבאמצעות הרקורסיה ובעזרת פונקצית בחירה אנו מטפסים למעלה בקבוצה W הסדורה חלקית עד שאנו מגיעים לאיבר מקסימלי. נתבונן במסלול V אותו אנו עוברים במהלך הטיפוס עד שאיננו יכולים להמשיך יותר, כלומר בקבוצת כל הצמתים אשר דרכם אנו עוברים. מסלול זה הוא תמיד קבוצה סדורה לגמרי, כי בכל שלב בו אנו מטפסים לצומת חדשה זאת תמיד צומת הגדולה מכל הצמתים בהם עברנו עד כה. אם מדובר בקבוצה W סדורה חלקית כלשהי אז יכולה לקרות אחת משתי האפשרויות הבאות. הראשונה היא שאין ב-W איבר מקסימלי, וגם ב-W אין איבר הגדול מכל איברי V, והשניה היא שיש ב-W איבר מקסימלי. הלמה של צורן מנוסחת כך שמופיעה בה ההנחה שהאפשרות הראשונה אינה קיימת, כי לצורך השימוש בלמה של צורן מענין אותנו רק המקרה בו קיימת האפשרות השניה. מנקודת ראות מנותקת מהשימושים יתכן ועדיף הניסוח הבא:

תהי W קבוצה סדורה חלקית כלשהי. או שקיימת קבוצה $V \subseteq W$ שהיא מסודרת היטב ע"י היחס $<$ של W ואין לה חסם מלעיל ב-W, או שיש ב-W איבר מקסימלי.

לענין זה ראה גם את 156א'.

הוכחת הלמה של צורן. תהי C פונקצית בחירה על $P(W)$. לפי 150 קיים סודר γ כך ש- $\gamma \not\preceq W$. יהי end עצם כלשהו שאינו איבר של W. תהי $H : P(W) \to P(W)$ הפונקציה כך שעבור $V \subseteq W$ $H(V)$ היא קבוצת החסמים מלעיל ממש של V ב-W, כלומר קבוצת ה-y-ים ב-W המקיימים $x < y$ לכל $x \in V$. נגדיר עתה ברקורסיה פונקציה $F : \gamma \to W \cup \{\mathrm{end}\}$ כדלקמן.

$$F(\beta) = \begin{cases} C(H(\{F(\alpha) \mid \alpha < \beta\})) & \text{אם } \{F(\alpha) \mid \alpha < \beta\} \subseteq W \text{ ו- } H(\{F(\alpha) \mid \alpha < \beta\}) \neq \emptyset \\ \mathrm{end} & \text{אחרת} \end{cases}$$

נראה כי קבוצת הסודרים β עבורם $F(\beta) \neq \mathrm{end}$ היא רישא של γ ולכן, לפי 133ב', קבוצה זאת היא סודר δ המקיים $\delta \leq \gamma$. כדי לראות זאת נראה כי אם $\beta < \lambda < \gamma$ ו- $F(\beta) = \mathrm{end}$ אז גם $F(\lambda) = \mathrm{end}$. $\{F(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$ המכילה את $F(\beta) = \mathrm{end}$ אינה חלקית ל-W כי $\mathrm{end} \notin W$ ולכן, לפי הגדרת $F(\lambda)$, $F(\lambda) = \mathrm{end}$.

נראה עתה כי $F \restriction \delta$ היא שומרת סדר. יהי $\beta < \lambda < \delta$ אז, לפי הגדרת $F(\lambda)$, ומכיוון ש- $\lambda < \delta$, $F(\lambda)$ היא חסם מלעיל ממש של $\{F(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$ ומכיוון ש- $\beta < \lambda$ $F(\beta)$ נמצא בקבוצה זאת ולכן $F(\beta) < F(\lambda)$. אם $\delta = \gamma$ אז $F \restriction \delta$ היא העתקה שומרת סדר, ולכן חח"ע, של $\delta = \gamma$ לתוך W בניגוד לבחירת γ, לכן $\delta < \gamma$. מכיוון שלפי הגדרת δ קיים $\{F(\alpha) \mid \alpha < \delta\} \subseteq W$, לכן לפי הגדרת $F(\delta) = \mathrm{end}$ קיים $H(\{F(\alpha) \mid \alpha < \delta\}) = \emptyset$, כלומר שלקבוצה $V = \{F(\alpha) \mid \alpha < \delta\}$ אין חסם מלעיל ממש ב-A. מכיוון ש-$F \restriction \delta$ היא העתקה שומרת סדר של δ על V V היא קבוצה סדורה היטב ע"י הסדר של W. לכן לפי הנחת המשפט יש לקבוצה זאת חסם מלעיל b ב-W. b הוא איבר מקסימלי של W, כי אילו היה ב-W איבר c הגדול מ-b שהוא חסם מלעיל של W אז c היה חסם מלעיל ממש של V, בניגוד למה שאמרנו שאין ל-V חסם עליון ממש.

154. **משפט**. הלמה של צורן גוררת את משפט הסדר הטוב.

הוכחה. ברור שמדובר כאן בהוכחה ללא שימוש באקסיומת הבחירה, כי ב-151 כבר הוכחנו את משפט הסדר הטוב מאקסיומת הבחירה. בין היתר, מטרת ההוכחה הנוכחית היא למלא אחר ההבטחה שניתנה

במבוא ללמה של צורן היכן שאמרנו שהלמה של צורן אמורה להכיל בקרבה את השימוש בהגדרה ברקורסיה ובפונקצית בחירה בהוכחת 151, וכדי להגיע להוכחה של משפט הסדר הטוב יש להוסיף רק פרטים ספציפיים למקרה זה.

תהי A קבוצה כלשהי, ותהי W קבוצת כל הפונקציות החח"ע מסודר כלשהו ל-A. (לאור האמור בתחילת ההוכחה של 151 התחומים של כל הפונקציות ב-W הם סודרים הקטנים מ-γ). W סדורה חלקית ע"י יחס ההכלה $\subseteq$ (במובן של $\leq$). נראה כי W ממלאת אחר התנאי של הלמה של צורן. תהי $V \subseteq W$ סדורה לגמרי ע"י $\subseteq$. נוכיח כי $\bigcup V$ היא חסם מלעיל של V ב-W, ותחילה נוכיח כי $\bigcup V \in W$. מכיוון ש-V סדורה לגמרי ע"י ההקפה לכל שתי פונקציות ב-V האחת מקיפה את השניה ולכן הן מתיישבות. מכיוון ש-V היא קבוצה של פונקציות מתיישבות הדדית גם $\bigcup V$ היא פונקציה. התחום של $\bigcup V$ הוא אחוד התחומים של איברי V שהם סודרים ולכן, לפי 139ב', גם הוא סודר. איברי V הם פונקציות לתוך A ולכן גם הטווח של אחודם, שהוא אחוד הטווחים שלהם, הוא קבוצה חלקית ל-A. נראה עתה כי $\bigcup V$ היא פונקציה חח"ע. יהיו $\alpha, \beta \in \operatorname{Dom} \bigcup V$, $\alpha \neq \beta$. אז קיימים $f, g \in V$ כך ש- $\alpha \in \operatorname{Dom} f$ ו- $\beta \in \operatorname{Dom} g$. מכיוון ש-$V$ סדורה לגמרי ע"י $\subseteq$, אחת מ-f, g מוקפת ע"י השניה, נאמר $f \subseteq g$. אז $\alpha, \beta \in \operatorname{Dom} g$. מכיוון ש-$g$ חח"ע קיים $g(\alpha) \neq g(\beta)$, ומכיוון ש- $g \subseteq \bigcup V$ קיים $\bigcup V(\alpha) \neq \bigcup V(\beta)$. כך הוכחנו כי $\bigcup V \in W$. ברור כי לכל $f \in V$ $f \subseteq \bigcup V$ ולכן $\bigcup V$ היא חסם מלעיל של W.

מכיוון שמתקיים התנאי של הלמה של צורן מתקיימת, לפי הלמה של צורן, מסקנת הלמה, והיא שקיים איבר מקסימלי F ב-W. F היא פונקציה שתחומה הוא סודר δ. נראה כי טווח F הוא הקבוצה A כולה ולכן F משרה סדר טוב על A, לפי 149. נניח כי טווח F אינו כל A ואז יהי $z \in A \setminus \operatorname{Range} F$. תהי $F' = F \cup \{\langle \delta, z \rangle\}$. ברור כי $F' : \delta \cup \{\delta\} \to \operatorname{Range}(F) \cup \{z\} \subseteq A$. F' היא חח"ע כי F חח"ע ו- $z \notin \operatorname{Range} F$, לכן $F' \in W$. מכיוון ש- $F \subsetneq F' \in W$, זאת סתירה למקסימליות F. לכן $\operatorname{Range} F = A$, וקיים סדר טוב ל-$A$.

155. **הגדרה**. בקבוצה A סדורה חלקית **שרשרת** היא קבוצה $B \subseteq A$ הסדורה לגמרי ע"י A. B נקראת **שרשרת מקסימלית** אם B היא שרשרת ואף קבוצה $B \subseteq D \subseteq A$ אינה שרשרת.

קבוצה $B \subseteq A$ נקראת **אנטישרשרת** אם אף שני איברים של B אינם ניתנים להשוואה ב-A. קבוצה B נקראת **אנטישרשרת מקסימלית** אם B היא אנטישרשרת ואף קבוצה $B \subseteq D \subseteq A$ אינה אנטישרשרת.

156. **תרגיל**. כל אחד מן הבאים שקול ללמה של צורן.

א. בכל קבוצה סדורה חלקית יש שרשרת מקסימלית.

ב. בכל קבוצה סדורה חלקית A ישנה תת קבוצה B הסדורה היטב ע"י הסדר של B ולא קיימת קבוצה $B \subseteq D$ הסדורה היטב ע"י הסדר של A ואשר B רישא ממש שלה.

157. **משפט**. משפט הסדר הטוב גורר את אקסיומת הבחירה.

הוכחה. תהי נתונה קבוצה A כלשהי של קבוצות ונוכיח שקיימת פונקצית בחירה C על A. לפי משפט הסדר הטוב קיים יחס סדר טוב $<$ על $\bigcup A$. נגדיר פונקציה C שתחומה A ע"י שנקבע כי לכל $X \in A$ שאינה ריקה $C(X)$ הוא האיבר המזערי של $X \subseteq \bigcup A$ לפי היחס $<$, ואם $X = \emptyset$ אז $C(X) = \emptyset$. ברור כי C היא כנדרש.

158. לאור משפטים 153, 154 ו-157 אקסיומת הבחירה, משפט הסדר הטוב והלמה של צורן שקולים זה לזה, וכפי שנראה עתה, גם משפט השוואת העוצמות שקול להם.

159. **משפט השוואת העוצמות** (אה"ב). לכל שתי קבוצות A, B קיים $A \preceq B$ או $B \preceq A$. במונחים של עוצמות זה אומר שלכל שתי עוצמות a, b קיים $a \leq b$ או $b \leq a$.

הוכחה. נסדר, לפי משפט הסדר הטוב 151, את הקבוצות A ו-B בסדר טוב. לפי 123 קיימת העתקה שומרת

סדר, ולכן חח"ע, מאחת משתי הקבוצות הללו לתוך חברתה.

160. **משפט**. משפט השוואת העוצמות גורר את משפט הסדר הטוב.
הוכחה. תהי A קבוצה כלשהי ונראה כי יש עליה סדר טוב. לפי 150 קיים סודר γ כך ש-A $\gamma \not\preceq A$. לכן לפי משפט השוואת העוצמות קיים $\gamma \preceq A$, כלומר קיימת פונקציה $F : A \to \gamma$ חח"ע. γ ולכן $\mathrm{Range}(F) \subseteq \gamma$ סדורה היטב ע"י $<$. לפי 149 F^{-1} משרה סדר טוב על A.